

Complementos de Análise Complexa

Exame de Época Especial, 14/9/2009

Duração: 180 minutos

1. Seja $T(z)$ uma transformação de Möbius com um único ponto fixo $\alpha \in \mathbb{C}$. Mostre que existe um complexo β tal que

$$\frac{1}{T(z) - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + \beta.$$

Escrevendo $T(z)$ como $\frac{az + b}{cz + d}$, demonstre que a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem um único valor próprio com espaço próprio de dimensão 1.

2. Considere o polinómio $p(z) = az^3 - 3z + b$, com $0 < b < 1 \leq a < 2$.
- a) Mostre que $p(z)$ tem na coroa $K = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ dois zeros simples ou um zero duplo.
- b) Determine, justificando, o índice em torno da origem do caminho parametrizado por $\gamma(t) = \frac{f(e^{it})}{e^{3it}}$, com $t \in [0, 4\pi]$.

3. Considere um caminho fechado no plano $\gamma \subset \mathbb{C}$ e a função índice

$$I(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw.$$

Seja $U \subset \mathbb{C}$ uma região no plano de tal forma que $U \setminus \gamma$ tem duas componentes conexas A e B , e que $U \cap \gamma$ é homeomorfo a um intervalo. Mostre que $I(\gamma, z_1) - I(\gamma, z_2)$ é uma constante para todo $z_1 \in A$ e $z_2 \in B$, e que este número pode ser qualquer inteiro.

4. Considere a função $f(z) = e^{2z} + e^{-2z} + 2$. Verifique que f tem zeros simples nos pontos $z_n = \frac{i\pi}{2}(2n + 1)$, e calcule a sua ordem. Determine a factorização de Hadamard de f .

5. Seja $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ uma função holomorfa do disco unitário nele próprio. Prove que para todo $a \in \mathbb{D}$ se tem

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}.$$

(Sugestão: Considere uma função $F = \phi_1 \circ f \circ \phi_2 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, onde ϕ_1, ϕ_2 são automorfismos do disco escolhidos de modo a ter-se $F(0) = 0$, e aplique o lema de Schwarz.)

6. (a) Construa uma aplicação conforme entre a região $U = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re z < 1\}$ e o disco unitário \mathbb{D} . (b) Seja $f \in H(U)$. Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \Re z = 0 \implies \Re f(z) = 1 \\ (ii) \quad & f(-\bar{z}) + \overline{f(z)} = 2, \forall z \in U. \end{aligned}$$

7. Seja τ um número complexo com parte imaginária positiva. Considere a função de Jacobi $\vartheta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{2\pi i n z} e^{\pi i n(n+1)\tau}$ e assuma a convergência uniforme desta série em \mathbb{C} .

- a) Mostre as relações:

$$\begin{aligned} \vartheta(z+1) &= \vartheta(z) \\ \vartheta(z+\tau) &= -e^{-2\pi i(z+\tau)} \vartheta(z) \\ \vartheta(-z) &= -e^{2\pi i z} \vartheta(z). \end{aligned}$$

- b) Use as relações acima para demonstrar que $\vartheta(z)$ tem zeros simples nos pontos do reticulado gerado por 1 e τ e que estes são os únicos zeros de $\vartheta(z)$ em \mathbb{C} .

8. Mostre que a função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ não pode ser continuada analiticamente para nenhuma região estritamente maior que o disco unitário \mathbb{D} .