

# Complementos de Análise Complexa

## Ficha 3 - Propriedades Locais

(Entregar 22/10)

1. (a) Seja  $f$  holomorfa numa região  $\Omega$ ,  $z_0 \in \Omega$  e  $f'(z_0) = 0$ . Mostre que  $f$  não é bijectiva em nenhuma vizinhança de  $z_0$ . (b) Sejam  $U$  e  $V$  regiões de  $\mathbb{C}$  e  $g : U \rightarrow V$  holomorfa e bijectiva. Mostre que  $g^{-1}$  é holomorfa em  $V$  e que  $g'$  não se anula em  $U$ .
2. Seja  $f \in H(\Omega)$  e  $z_0 \in \Omega$ . Define-se a multiplicidade de  $f$  em  $z_0$ ,  $mult_{z_0}f$ , pela igualdade  $mult_{z_0}f = ord_{z_0}(f(z) - f(z_0))$ . Mostre que  $mult_{z_0}f \geq 1$  e que  $mult_{z_0}(g \circ f) = mult_{z_0}f \cdot mult_{f(z_0)}g$ , sempre que  $g$  é holomorfa numa região contendo  $f(z_0)$ .
3. Prove que se  $f$  é holomorfa num conjunto compacto  $K \subset \mathbb{C}$  (ou seja,  $f \in H(\Omega)$  para certa região  $\Omega \supset K$ ), então  $f$  tem um número finito de zeros em  $K$ .
4. Seja  $\Omega$  uma região em  $\mathbb{C}$  e  $f \in H(\Omega)$ . Prove que se  $\Re f$  ou  $\Im f$  (partes reais e imaginárias de  $f$ ) têm um máximo local num ponto  $z_0 \in \Omega$ , então  $f(z)$  é constante em  $\Omega$ .
5. (Lema de Schwarz) Seja  $f$  uma função holomorfa no disco unitário  $\mathbb{D}$ , com  $f(0) = 0$  e  $|f(z)| < 1$ , para todo o  $z \in \mathbb{D}$ . Mostre que  $g(z) = f(z)/z$  é uma função holomorfa em  $\mathbb{D}$  e prove que  $|f(z)| \leq |z|$  para todo o  $z \in \mathbb{D}$ .
6. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções inteiras tais que  $|f(z)| \leq |g(z)|$ . Prove que existe uma constante  $c \in \mathbb{C}$ , com  $|c| \leq 1$ , tal que  $f(z) = cg(z)$ . (Sugestão: use o teorema das singularidades removíveis de Riemann).
7. Seja  $f$  uma função inteira e sejam  $A$  e  $a$  números reais positivos tais que  $|f(z)| \leq A|z|^a$ , para todo o  $z$  com módulo suficientemente grande. Prove que  $f$  é um polinómio de grau  $n < a + 1$ .