

Complementos de Análise Complexa

Ficha 4 - Propriedades globais

(Entregar a 7/11)

1. Seja Ω uma região em \mathbb{C} e defina-se o conjunto

$$h(\Omega) = \{I(\gamma, z) : z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \gamma \text{ é uma curva fechada em } \Omega\}.$$

Mostre que $h(\Omega) = \{0\}$ se e só se Ω é simplesmente conexo, e que $h(\Omega) = \mathbb{Z}$ quando Ω é o complementar de um conjunto finito de pontos em \mathbb{C} .

2. Seja γ uma curva fechada e simples, $z_0 \in \{\gamma\}$ e $D = \mathbb{D}(z_0, r)$ um disco aberto de tal forma que $D \setminus \{\gamma\} = A \cup B$ é a união de duas componentes conexas A e B . Prove que $|I(\gamma, a) - I(\gamma, b)| = 1$, sempre que $a \in A$ e $b \in B$.
3. Mostre que a fórmula integral de Cauchy global é uma consequência do teorema de Cauchy global.
4. Sejam z_1 e z_2 dois pontos distintos de \mathbb{C} . Sejam γ_1 e γ_2 os caminhos $|z - z_1| = r_1$ e $|z - z_2| = r_2$, com r_1 e r_2 suficientemente pequenos de modo a que γ_1 e γ_2 não se interessem. Se $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\})$, $\int_{\gamma_1} f(z) dz = a_1$ e $\int_{\gamma_2} f(z) dz = a_2$, determine o conjunto de todos os valores de $\int_{\gamma} f(z) dz$, em que γ é qualquer curva em $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ e mostre que é um subgrupo de \mathbb{C} .
5. Considere uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ e uma cadeia $C = \sum a_k \gamma_k$ em Ω . Prove que $C \approx 0$ se e só se $\int_C f(z) dz = 0$ para todo o $f \in H(\Omega)$.
6. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função numa região de \mathbb{C} . Verifique que as partes reais e imaginárias da forma diferencial $f(z) dz$ são formas fechadas em Ω se e só se f é holomorfa. Identifique estas formas no caso $f(z) = \frac{1}{z}$, e $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
7. Indique uma região maximal onde as seguintes funções são definíveis por continuidade (a) $(z+1)^{\frac{3}{2}}$; (b) $z^{\frac{1}{2}} + (z-1)^{\frac{1}{2}}$. Mostre que se $f(z)$ é holomorfa e não se anula numa região simplesmente conexa Ω , para todo o natural n está bem definida e é holomorfa em Ω a função $f^{\frac{1}{n}}$.