

Complementos de Análise Complexa

Ficha 8 - Funções Elípticas

(Entregar a 18/12)

1. Recorde que a função \wp de Weierstrass, relativa ao reticulado Λ gerado por dois períodos ω_1 e ω_2 é dada por:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right].$$

Prove que $\wp'(z)$ tem três zeros no polígono fundamental $P = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : 0 \leq t_1, t_2 < 1\}$, e que são todos simples.

2. Seja Λ um reticulado e $\sigma(z) = z \prod_{\omega \in \Lambda^*} E_3\left(\frac{z}{\omega}\right)$, onde $E_3(w) = (1-w)e^{w+\frac{w^2}{2}}$. Mostre que σ é inteira, ímpar e que

$$\wp_\Lambda(z) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \right).$$

3. Seja Λ um reticulado maximal em \mathbb{C} , e seja $\Lambda_2 := \{z \in \mathbb{C} : 2z \in \Lambda\}$. Mostre que se $f(z)$ tem zeros simples em $\Lambda_2 \setminus \Lambda$ e polos triplos em Λ então $f(z) = c\wp'(z)$, para uma certa constante $c \in \mathbb{C}$.
4. Seja τ um número complexo com parte imaginária positiva. Considere a função de Jacobi $\vartheta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{2\pi i n z} e^{\pi i n(n+1)\tau}$ e assuma a convergência uniforme desta série em \mathbb{C} . (a) Mostre as relações:

$$\begin{aligned} \vartheta(z+1) &= \vartheta(z) \\ \vartheta(z+\tau) &= -e^{-2\pi i(z+\tau)} \vartheta(z) \\ \vartheta(-z) &= -e^{2\pi i z} \vartheta(z). \end{aligned}$$

(b) Use as relações acima para demonstrar que $\vartheta(z)$ tem zeros simples nos pontos do reticulado gerado por 1 e τ e que estes são os únicos zeros de $\vartheta(z)$ em \mathbb{C} .

5. Seja $\tau \in \mathbb{H}$, Λ o reticulado gerado por 1 e τ , e $\theta(z)$ uma função inteira ímpar que verifica

$$\begin{cases} \theta(z+1) = \theta(z) \\ \theta(z+\tau) = -e^{-2\pi i z - \pi i \tau} \theta(z), \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(a) Mostre que $\frac{d}{dz} \left(\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \right)$ é uma função elíptica em relação a Λ . (b) Mostre que $\theta(z)$ tem zeros simples nos pontos de Λ , que estes são os únicos zeros de $\theta(z)$ e que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $\wp(z) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \right) + c$, onde $\wp(z)$ é a função \wp de Weierstrass relativa ao reticulado Λ .