Análise Complexa

Ficha 0 - Exercícios de Revisão

Baseado em Exercícios dos Testes/Exames de ACED, LMAC do ano lectivo 2010/11

1.
   (a) Calcule as raízes cúbicas de $-8i$ e assinale-as no plano complexo.
   (b) Determine o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} z^n$.

2. Esboce o conjunto S e a sua imagem pela função f.
   (a) $S = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} < \Re z < 0, \frac{\pi}{2} < \Im z < \pi\}$, $f(z) = e^z$.
   (b) $S = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0\}$, $f(z) = \sqrt{z}$, onde a raiz é a principal (o argumento de z varia no intervalo $]-\pi, \pi]$).

3. Determine os pontos $z \in \mathbb{C}$ onde a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x + iy) = (x^2 - y^2 + \cos x) + i2xy$ é diferenciável, e calcule a derivada nesses pontos.

4. Determine o desenvolvimento em série de Laurent em torno de z_0 de $f(z)$, numa região contendo o ponto z_1, indicando a maior região onde o desenvolvimento é válido. Classifique as singularidades da função $f(z)$.
   (a) $z_0 = \pi$, z_1 arbitrário em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, e $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^3}$,
   (b) $z_0 = 0$, $z_1 = -2$, e $f(z) = \frac{4}{(z+1)(z-3)}$

5. Calcule e simplifique o resultado.
   (a) $\int_L \bar{z}\, dz$, onde L é o segmento de recta com início em -2 e fim em i.
   (b) $\int_1^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{1}{z}\, dz$, onde a curva que une os extremos está contida no primeiro quadrante.
   (c) $\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{\pi}{2}iz}}{(z-1)(z-3)}\, dz$.

6. Prove que se f é diferenciável em $z = a$ e $f'(a) \neq 0$, então f é conforme em a (isto é, como aplicação entre regiões em $\mathbb{R}^2$, f preserva os ângulos entre vectores localizados no ponto a).

7. Seja $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Suponha que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções holomorfas definidas no conjunto $\Omega = \mathbb{D}(r, a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$, convergindo uniformemente para f, e γ é uma curva de comprimento finito em Ω.
   (a) Prove que $\int_\gamma f_n(z)dz$ converge para $\int_\gamma f(z)dz$.
   (b) O resultado da alínea anterior permaneceria válido se Ω fosse um domínio não simplesmente conexo? Justifique.