

# Complementos de Análise Complexa

**Primeiro Teste** - 15 de Novembro, 2008

Duração: 90 minutos

(Uma das perguntas é opcional)

1. Seja  $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  uma transformação de Möbius que não é conjugada a uma translação (isto é, não existe transformação de Möbius  $S(z)$  tal que  $S^{-1} \circ F \circ S(z) = z + \beta$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$ ).

(a) Mostre que  $F$  tem dois pontos fixos distintos em  $\mathbb{C}_\infty$ .

(b) Designando por  $z_1$  e  $z_2$  os pontos fixos e supondo que nenhum é  $\infty$ , demonstre que  $(z_1, 1)$  e  $(z_2, 1)$  são vectores próprios da matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  associada a  $F(z)$ .

**Resolução:** (a) [3,5 val] Por hipótese,  $F$  não é a transformação identidade, pelo que pode ter 1 ou 2 pontos fixos. Como as transformações de Möbius actuam bijectivamente e transitivamente em  $\mathbb{C}_\infty$ , se  $F$  tem um único ponto fixo, então  $F$  é conjugada a uma transformação que tem  $\infty$  como único ponto fixo. As transformações que fixam  $\infty$  são da forma  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  com  $c = 0$  uma vez que  $T(\infty) = \frac{a}{c}$ . Assim,  $T(z) = \alpha z + \beta$  (necessariamente  $d \neq 0$ ) e para que  $T$  não tenha outro ponto fixo, não pode haver solução da equação  $\alpha z + \beta = z$  pelo que  $\alpha = 1$ , e concluímos que  $T$  é uma translação, contrariando a hipótese. Assim,  $F$  tem dois pontos fixos.

(b) [1,5 val] Se  $z_1$  é um ponto fixo e não é  $\infty$ , então  $\frac{az_1+b}{cz_1+d} = z_1$ , com  $cz_1 + d \neq 0$ . Assim temos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + b \\ cz_1 + d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{az_1+b}{cz_1+d} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o que mostra que  $(z_1, 1)$  é vector próprio, com valor próprio  $\lambda = cz_1 + d$ . Para  $z_2$  o procedimento é idêntico.

2. Considere uma função  $f(z)$  meromorfa em  $\mathbb{C}_\infty$ , cujos pólos são  $z_1, \dots, z_n$ . Seja  $\frac{1}{(z-z_k)^{j_k}}$  a parte principal de  $f$  no ponto  $z_k$  ( $j_k \in \mathbb{N}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ).

(a) Mostre que existe um polinómio  $p(z)$  tal que, para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ :

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(z-z_k)^{j_k}} + p(z).$$

(b) No caso em que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , mostre que  $\text{ord}_\infty f = \min \{j_1, \dots, j_n\}$ .

**Resolução:** (a) [3,5 val] Consideremos a função:

$$g(z) := f(z) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(z-z_k)^{j_k}}. \tag{1}$$

A parte principal da série de Laurent de  $g(z)$  em torno de cada  $z_k$  é nula, pelo que esta função só tem singularidades removíveis e pode ser estendida a uma função inteira. Como  $f$  e  $g$  diferem por uma função holomorfa em  $\infty$ , e  $f$  é meromorfa em  $\infty$ ,  $g$  é também meromorfa em  $\infty$ . Agora mostramos que as funções  $g(z)$  holomorfas em  $\mathbb{C}$  que são meromorfas em  $\infty$  (isto é, que podem ser estendidas a  $\mathbb{C}_\infty$  tendo singularidades não essenciais em  $\infty$ ) são os polinómios. De facto se  $g$  é inteira temos  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  e a singularidade em  $\infty$  é do tipo da singularidade que  $h(z) = g(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$  tem em  $z = 0$ . Assim,  $g$  tem um pólo em  $z = \infty$  sse  $h$  tem parte principal finita em  $z = 0$ , o que acontece precisamente quando somente um número finito de coeficientes  $a_n$  não se anulam, ou seja, quando  $g$  é um polinómio, como queríamos provar.

(b) [1,5 val] A ordem de  $f(z)$  em  $\infty$  é a ordem de  $f(\frac{1}{z})$  em  $z = 0$ . Escrevendo:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{1}{z} - z_k\right)^{j_k}} + p\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{z^{j_k}}{(1 - z z_k)^{j_k}} + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_m}{z^m},$$

vemos que a condição  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f(\frac{1}{z}) = 0$ , implica que todos os coeficientes  $a_0, \dots, a_m$  são nulos. Assim,  $f$  é uma soma de  $n$  parcelas da forma  $\frac{z^{j_k}}{(1 - z z_k)^{j_k}}$ , todas elas holomorfas em  $z = 0$ , e com ordem  $j_k \geq 1$ . Logo,

$$\text{ord}_0 f\left(\frac{1}{z}\right) = \min \left\{ \text{ord}_0 \frac{z^{j_1}}{(1 - z z_1)^{j_1}}, \dots, \text{ord}_0 \frac{z^{j_n}}{(1 - z z_n)^{j_n}} \right\} = \min \{j_1, \dots, j_n\}.$$

3. Seja  $\Omega$  uma região no plano complexo e  $H(\Omega)$  o anel das funções holomorfas em  $\Omega$ . Mostre que  $H(\Omega)$  é um domínio integral, isto é: para qualquer par de funções  $f, g \in H(\Omega)$ , se  $f(z)g(z) = 0$  para todo  $z \in \Omega$ , então pelo menos uma das funções  $f(z)$  ou  $g(z)$  é identicamente nula em  $\Omega$ .

**Resolução:** [5 val] Se  $f(z)g(z) = 0$  para todo  $z \in \Omega$ , e  $z_0$  é um ponto de  $\Omega$ , então  $f(z_0) = 0$  ou  $g(z_0) = 0$ . Suponhamos, sem perda de generalidade que  $f(z_0) = 0$  e que  $f(z)$  não é identicamente nula em  $\Omega$ . Então, pelo princípio dos zeros isolados, existe um disco  $D$  centrado em  $z_0$  e contido em  $\Omega$ , tal que  $z_0$  é o único zero de  $f$  em  $D$ . Assim  $f$  não se anula em  $D^* = D \setminus \{z_0\}$ . Logo,  $g(z) = 0$  para todo o  $z \in D^*$ , pois  $f(z)g(z) = 0$  para todo o  $z$  em  $D^*$  (e  $\mathbb{C}$  é um domínio integral). Como  $g$  se anula num conjunto ( $D^* \subset \Omega$ ) com pontos de acumulação, pelo princípio da identidade, temos que  $g$  é identicamente nula em  $\Omega$  (note-se que  $\Omega$  é conexo).

4. Seja  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $\rho : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação dada por  $\rho([f]) = \text{Res}(f, 0)$ , onde  $H^1(\Omega) = H(\Omega)/P(\Omega)$  e  $P(\Omega) \subset H(\Omega)$  é o subespaço vectorial das funções primitiváveis em  $\Omega$ .

(a) Mostre que  $\rho$  está bem definida (o seu valor é independente do representante da classe de  $f$ ).

(b) Prove que  $\rho$  é um isomorfismo de espaços vectoriais sobre  $\mathbb{C}$ .

**Resolução:** (a) [2,5 val] Seja  $[f] = [g] \in H^1(\Omega)$  onde  $f, g \in H(\Omega)$ . Então, existe uma função  $F$  primitivável em  $\Omega$  tal que  $f - g = F$ . Uma vez que  $F$  é primitivável, temos  $\oint_{|z|=1} F(z)dz = 0$ , pelo teorema fundamental do cálculo, onde a circunferência

é percorrida uma vez no sentido directo. Assim,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} f(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} g(z) dz = \text{Res}(f, 0) - \text{Res}(g, 0)$$

pela linearidade do integral, o que implica o resultado pretendido:

$$\rho([f]) - \rho([g]) = \text{Res}(f, 0) - \text{Res}(g, 0) = 0.$$

(b) [2,5 val] Para provar que  $\rho$  é um homomorfismo, só temos que provar que é linear, ou seja  $\rho([af + bg]) = a\rho([f]) + b\rho([g])$ . Isto é consequência da linearidade do integral, como na alínea (a). Para mostrar que é um isomorfismo, verifiquemos que  $\rho$  é sobrejectivo e injectivo. Dado  $c \in \mathbb{C}$ , seja  $f(z) = \frac{c}{z}$ . Então  $\rho([f]) = c$ , o que mostra a sobrejectividade. O núcleo de  $\rho$  é constituído pelas classes  $[f]$  tais que  $\text{Res}(f, 0) = 0$ . Uma tal função  $f$  verifica:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i I(\gamma, 0) \text{Res}(f, 0) = 0,$$

para qualquer curva fechada  $\gamma \subset \Omega$ , pelo teorema de Cauchy global para singularidades isoladas (note-se que  $\gamma \approx 0$  em  $\mathbb{C}$ , pois  $\mathbb{C}$  é simplesmente conexo). Assim,  $f$  é primitivável e  $[f] = 0$ . Isto mostra a injectividade.

5. Considere o polinómio  $p(z) = 1 + z^n + z^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Calcule o integral  $\oint_{|z|=2} \frac{nz^{n-1} + (n+1)z^n}{p(z)} dz$ , onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

(b) Mostre que  $p(\frac{1}{z})$  não tem zeros na região  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ .

**Resolução:** (a) [3 val] Na circunferência  $|z| = 2$  o polinómio  $p(z)$  não tem raízes, pois  $1 + z^n + z^{n+1} = 0$  implica  $1 + z = -\frac{1}{z^n}$  ou seja  $|1 + z| = \frac{1}{2^n}$ , o que é impossível para  $|z| = 2$  e  $n \geq 1$ . A função  $h(z) = z^{n+1}$  tem  $n+1$  zeros (contados com multiplicidades) na componente interior da curva de Jordan  $|z| = 2$ . Para  $|z| = 2$  temos:

$$|p(z) - h(z)| = |1 + z^n| \leq 1 + 2^n < 2^{n+1} = |h(z)|.$$

Assim, pelo teorema de Rouché,  $p(z)$  tem também  $n+1$  zeros (contados com multiplicidades), donde, pelo princípio do argumento:

$$\oint_{|z|=2} \frac{nz^{n-1} + (n+1)z^n}{p(z)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i(n+1).$$

(b) [2 val] Os zeros de  $p(\frac{1}{z}) = 1 + z^{-n} + z^{-n-1} = \frac{z^{n+1} + z + 1}{z^{n+1}} = 0$  ocorrem apenas onde polinómio  $q(z) = z^{n+1} + z + 1$  tem raízes. Para  $|z| = 2 + \varepsilon$ , com  $\varepsilon > 0$  temos:

$$|q(z) - z^{n+1}| = |1 + z| \leq 1 + 2 + \varepsilon < (2 + \varepsilon)^{n+1} = |z|^{n+1},$$

pelo que o teorema de Rouché aplica-se para mostrar que todas as raízes de  $q(z)$  (em total  $n+1$ , pois  $q$  tem grau  $n+1$ ) estão no interior da circunferência centrada em 0 de raio  $2 + \varepsilon$ , para qualquer  $\varepsilon > 0$ . Assim,  $q(z)$  e consequentemente  $p(\frac{1}{z})$  não tem zeros na região indicada.