Complementos de Análise Complexa

Teste de Recuperação 1 - 21 de Janeiro, 2009

Duração: 90 minutos

(Uma das perguntas é opcional)

1. Seja T uma transformação de Möbius que não fixa o ponto ∞ e, para $y \in \mathbb{R}$, seja R_y a recta horizontal $R_y = \{x + iy : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}_\infty$ considerada como circunferência em $\mathbb{C}_\infty$. Seja $C_y = T(R_y)$, $y \in \mathbb{R}$ a família de circunferências em $\mathbb{C}_\infty$ obtidas aplicando T. (a) Mostre que quaisquer duas das curvas C_y se intersectam no mesmo ponto, sendo tangentes nesse ponto. (isto é, existe z_0 tal que $C_{y_1} \cap C_{y_2} = \{z_0\}$ $\forall y_1 \neq y_2 \in \mathbb{R}$, e esta intersecção é tangencial). (b) Supondo que esse $z_0 = 0$ e C_1 é a circunferência de raio 1 centrada em $z = 1$, determine explicitamente uma tal transformação T.

2. Seja f uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ e no ponto ∞. (a) Prove que f é uma função racional, isto é que pode ser escrita na forma $f(z) = p(z)/q(z)$ onde $p(z)$ e $q(z)$ são polinómios. (b) Mostre que a diferença entre o grau de p e o de q é precisamente igual a $-\mathrm{ord}_\infty f$.

3. Sejam f e g duas funções inteiras tais que $|f(z)| \leq |g(z)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$. (a) Prove que f/g é uma função inteira. (b) Prove que f/g é uma constante $c \in \mathbb{C}$, com $|c| \leq 1$.

4. Seja Ω uma região limitada do plano complexo. Mostre que Ω é uma região simplesmente conexa se e só se qualquer função holomorfa em Ω é primitivável em Ω. [Sugestão: numa das direcções, mostre primeiro que em Ω, todas as curvas fechadas são homólogas a zero]

5. Seja $p(z)$ uma função inteira tal que $|p(z)| < 1$ em $|z| = 1$, e tal que $f(z) = p(z) - z^n$ tem apenas zeros de ordem 1. (a) Determine o número de zeros de $f(z)$ no interior do disco unitário. (b) Calcule o integral $\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ (percorrido uma vez no sentido directo) e o índice da curva $\sigma(t) = f(e^{4\pi i t}), t \in [0, 1]$ em torno da origem.

Teste de Recuperação 2 - 21 de Janeiro, 2009
Duração: 90 minutos
(Uma das perguntas é opcional)

1. Seja f uma transformação conforme do conjunto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0, \Im z > 0\}$ para o disco unitário $\mathbb{D}$, com a propriedade $f(i+1) = 0$. (a) Determine explicitamente uma expressão para f. (b) Existirá outra função com tais propriedades? Justifique.

2. Seja $h(z)$ uma função inteira de ordem finita ≥ 1, cujos únicos zeros são simples e estão nos pontos $z_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Supondo que $h(0) = 1$ e que h é par, mostre que existe uma função inteira $f(z)$, com $f(0) = 0$, tal que $h(z) = e^{f(z^2)} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$.

3. Seja $\{u_n\}_{n=1,2,\dots}$ uma sucessão de funções harmónicas no disco unitário $\mathbb{D}$ que converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Prove que o limite $u = \lim_n u_n$ é uma função harmónica.

4. Seja τ um número complexo com parte imagnária positiva. Considere a função de Jacobi $\vartheta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{2\pi i n z} e^{\pi i n(n+1)\tau}$ e assuma a convergência uniforme desta série em $\mathbb{C}$. (a) Mostre as relações:

$$\begin{aligned} \vartheta(z+1) &= \vartheta(z) \\ \vartheta(z+\tau) &= -e^{-2\pi i(z+\tau)} \vartheta(z) \\ \vartheta(-z) &= -e^{2\pi i z} \vartheta(z). \end{aligned}$$

   (b) Use as relações acima para demonstrar que $\vartheta(z)$ tem zeros simples nos pontos do recticulado gerado por 1 e τ e que estes são os únicos zeros de $\vartheta(z)$ em $\mathbb{C}$.

5. Seja f holomorfa na região $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0, \Im z > 0\}$, contínua em $\overline{\Omega}$ e tal que $f|_{\partial\Omega} \in \mathbb{R}$. Mostre que f pode ser continuado analiticamente para todo o plano complexo. Prove que a função assim obtida é par.